

2.

Expresiones algebraicas.*

- Dados los polinomios $p(x) = 1/2x^3 - 4x + 2$, $q(x) = 3x^2 - 2/3x^3 + x - 2$ y $r(x) = 5x^2 + 3x^3 - 1/5x + 3/2$, halla
 - $p(x) + q(x) - r(x)$.
 - $p(x) - 3(q(x) - r(x))$.
 - $2p(x)q(x) - 3r(x)$.
- Efectúa las siguientes operaciones:
 - $(x - 1/2)(x + 1/3) - (2x + 1/2)(x - 1/3) + (-1/3 + 2x)$.
 - $2 - (3 - 2x^2) - 2x[x(1 - x) - 1] - [2 - x(-1 + x)]$.
 - $(1 + 2x + x^2)(x + 1)(x^2 + 2x + 2)$.
 - $(3x + 2)^2(5x - 1) + 8(x^2 - 3x + 4)(x - 2)$.
- Sin operar, desarrolla el valor de las expresiones siguientes:
 - $(x + 0.4)^2$.
 - $(0,2 - 0,3x)^2$.
 - $(x/2 + 3/4)^2$.
 - $(1/2x + a)(1/2x - a)$.
 - $(3x + 2)^2 - (3x - 2)^2$.
- Completa las siguientes igualdades:
 - $(\dots \dots)^2 = 1/9 + 4/3x + 4x^2$.
 - $(\dots \dots)^2 = x^2 - 6x + 9$.
 - $(\dots \dots)^2 = 9x^2 + 6x + \dots$.
 - $(1 \dots)^2 = \dots - 6x^2 + \dots$.
 - $(1/x \dots)^2 = \dots - 1 + \dots$.
 - $(\dots + \dots)(\dots - \dots) = x^2 + 4x + 4 - a^2$.
- Usa el binomio de Newton para hallar las siguientes potencias: (a) $(1 + x)^5$. (b) $(1/x - 1)^4$.
- Escribe, en cada caso, un polinomio que tenga por raíces (a) $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$. (b) $x_1 = a$ y $x_2 = -a$.

*Estos ejercicios han sido extraídos del libro de bachillerato MATEMÁTICAS I de la EDITORIAL LA Ñ, cuyos autores son Francisco Benítez, Juan Luis Romero, Eloy Fernández, José Manuel Díaz, Alfredo Domínguez y Octavio Ariza. Se recomienda su lectura para la realización de estos ejercicios.

7. Halla el valor numérico de los polinomios siguientes cuando $x = 2$, $x = -1/2$ y $x = 0$.

- (a) $9x^3 + 4x^2 + 2x - 1$.
- (b) $35x^3 + 47x^2 - 12x - 7$.
- (c) $0,001x^4 + 0,15x^3 + 6,5x^2 - 1,25$.

8. Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las divisiones siguientes.

- (a) $(x^5 + 1) : (x - 1)$.
- (b) $(0,3x^3 - 0,2x^2 - 1,2x + 1) : (x - 0,2)$.
- (c) $(2x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 7x - 11) : (x - 4)$.
- (d) $(-3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 7x - 2) : (2x - 1)$.

9. Sin hacer la división: di si son o no divisibles:

- (a) $x^4 - 1$ entre $x - 1$.
- (b) $x^5 - 1$ entre $x + 1$.
- (c) $16x^4 - a^4$ entre $2x - a$.
- (d) $x^{10} + 0,00032$ entre $x^2 + 0,2$.

10. Factoriza (hasta lo que puedas) los siguientes:

- (a) $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$.
- (b) $2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$.
- (c) $3x^4 - 13x^3 + 19x^2 - 11x + 2$.

11. Construye un polinomio que

- (a) tenga como raíces 1, 2, -2 y 0;
- (b) sea de grado 4 y tenga únicamente las raíces 1 y -1;
- (c) valga 2 para $x = 1$ y 3 para $x = 2$;
- (d) tenga las raíces 0, 1 y 2, y dé resto 3 al dividirlo por $x + 1$;
- (e) al dividirlo por $x - 1$, $x - 2$ y $x - 3$ dé restos 1, 2, y 3, respectivamente.

12. ¿Cuáles de las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes?

$$\frac{2x+7}{6x^2}, \quad \frac{-6abx}{x^2-10x+25}, \quad \frac{4x^2+14x}{12x^3}, \quad \frac{6abx}{(x-5)^2}.$$

13. Simplifica las fracciones algebraicas siguientes:

- (a) $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$.
- (b) $\frac{(x+2)}{(x+2)^2}$.
- (c) $\frac{x + x^2}{a + ax}$.
- (d) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

14. Reduce a común denominador:

(a) $\frac{1}{4x}, \frac{x}{3}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{x+1}{x-2}.$

(b) $\frac{x}{x+1}, \frac{2x^2}{1-x+x^2}, \frac{2+x^2}{1+x^3}.$

15. Calcula:

(a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

(b) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$

(c) $\frac{2}{x} - \frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{2x}.$

16. Halla el valor de m para que:

(a) El polinomio $4x^2 - 6x + m$ sea divisible por $x - 3$.

(b) Al dividir el polinomio $x^3 - 2mx^2 + 2x - 4$ por $x - 2$ el resto sea 10.

17. La composición del polinomio $p(x)$ y el polinomio $q(x)$ es el polinomio $p(q(x))$ y se escribe $(p \circ q)(x)$. Por ejemplo, si $p(x) = 3x^2 - 2$ y $q(x) = x - 2$, entonces

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(x - 2) = 3(x - 2)^2 - 2 = 3x^2 - 12x + 10.$$

Si $p(x) = 3x - 4$ y $q(x) = 2x^2 - 5x + 8$,

(a) Comprueba que $(p \circ q)(x) = 6x^2 - 15x + 20$.

(b) Comprueba que $(q \circ p)(x) = 18x^2 - 63x + 60$.

18. Encuentra un polinomio de grado uno, $q(x)$, tal que si $p(x) = x^3 - 12x^2 + 29x - 18$, entonces $(p \circ q)(x)$ no tenga término en x^2 .

19. Demuestra que para todo k :

$$(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^{2^{k-1}}) = 1+x+x^2+\cdots+x^{2^k-1},$$

(a) por inducción.

(b) multiplicando los dos miembros por $1 - x$.

20. Sin resolver la ecuación de segundo grado, ¿qué raíces tiene el polinomio $p(x) = 2m(1+x^2) - (1+m^2)(x+m)$?

21. Si m y n son las raíces del polinomio $p(x) = 6x^2 - 5x - 3$, encuentra (sin calcular m y n) un polinomio cuyas raíces sean $m - n^2$ y $n - m^2$.

22. Si m y n son las raíces del polinomio $x^2 + bx + c$, demuestra que b y c son las raíces del polinomio

$$x^2 + (m+n-mn)x - mn(m+n).$$